ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки
Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-228-234
УДК 517.935

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

© А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет»
620100, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Сибирский тракт, 37
E-mail: vdovin@usfeu.ru, rublevas@mail.ru

Аннотация. Рассматривается численный метод построения неизвестного воздействия в нелинейной системе ОДУ.
Ключевые слова: обратные задачи динамики; динамический регуляризирующий алгоритм

Пусть движение динамической системы, функционирующей на временном промежутке $T = [a, b]$, описывается дифференциальным уравнением

$$x'(t) = f\big(t, x(t), v(t)\big), \qquad x(a) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $v(t) \in R^q$ — величина входного воздействия на систему в момент t. Допустимыми воздействиями будем считать всякую измеримую по Лебегу функцию $v(\cdot) : T \to Q \subset R^q$, где Q — известный выпуклый компакт. Функцию $x(\cdot) : T \to R^m$, являющуюся решением по Каратеодори задачи (1), станем называть движением, порожденным воздействием $v(\cdot)$.

Будем предполагать существование компакта $\mathbf{X} \subset R^m$, для которого включение $x(t) \in \mathbf{X}$ справедливо для всех $t \in T$ и движений $x(\cdot)$, порожденных допустимыми воздействиями.

Обозначим $W = T \times \mathbf{X} \times Q$, а W_ε — его ε – окрестность. Пусть функция $f(\cdot) : W_\varepsilon \to R^m$ — непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных на W_ε. Это гарантирует существование и единственность движения, порождаемого допустимым воздействием.

Обратную задачу для системы (1) станем трактовать, как проблему восстановления неизвестного воздействия $v(\cdot)$ по информации о порождаемом им движении $x(\cdot)$. Как известно, эта задача является некорректно поставленной. Методы решения некорректных задач называются методами регуляризации, а их конкретные реализации — регуляризирующими алгоритмами. Следуя общей теории некорректных задач, рассмотрим задачу (1) как операторное уравнение первого рода

$$A\,u = z, \tag{2}$$

относительно неизвестного $u \in L_2 = L_2[T, R^q]$, где $z \in L = L[T, R^m]$, $A : L_2 \to L$.

В классической работе [1] была предложена общая схема построения регуляризирующих алгоритмов, за счет введения в рассмотрение сглаживающего функционала. Пусть в задаче (2) вместо точных значений оператора A и элемента z известны аппроксимирующие их последовательности A_δ и z_h, где δ и h стремятся к нулю справа. Тогда, если параметр α удачно согласовать с характеристиками погрешностей δ и h, то последовательность $u(h, \alpha, \delta)$, на элементах которой достигается минимум функционала $\|A_\delta u - z_h\|_L^2 + \alpha\|u\|_{L_2}^2$, сходится к нормальному решению задачи (2).

Описанная схема нахождения приближенного решения изначально ориентирована на решение линейных задач.

Проблемы использования такого подхода к решению задачи (1) связаны с одной стороны со сложностью бесконечномерной оптимизации, и с необходимостью обладания и хранения информации о z на T с другой стороны. Опыт реализации метода сглаживающего функционала для решения задачи подобной (1) приведен в [2].

Динамический подход, позволивший избежать упомянутых выше проблем был предложен в [3], для случая линейного оператора из (2):

$$f\big(t, x, u\big) = f_1(t, x) + f_2(t, x)u$$

Использование метода управляемых моделей Н.Н. Красовского [4], позволило свести бесконечномерную задачу к серии решений конечномерных, проводимых на интервалах разбиения временного промежутка T.

Численный метод трактовался как процесс позиционного управления вспомогательной системой моделью по принципу обратной связи. При этом регуляризация метода экстремального сдвига осуществлялась с использованием сглаживающего функционала, но уже для конечномерной задачи. Сам процесс построения значения кусочнопостоянного элемента последовательности $u(h, \alpha, \delta)$ за счет необходимости выполнения конечного числа арифметических операций на каждом отрезке разбиения T мог быть реализован за время, соответствующее этому промежутку. В работе доказано, что предлагаемый конечношаговый динамический алгоритм является регуляризирующим. В монографии [5] авторы распространили динамический подход на более широкий круг задач, в том числе и в более общих пространствах. В частности рассматривался нелинейный вариант задачи (1).

В работе [6] отмечено, что схема применения сглаживающего функционала может быть перенесена на нелинейный случай, с использованием конструкции компактного вложения. При этом существенное значение может иметь дополнительная информация об искомом решении задачи. В частности это может быть информация о том, что точное решение задачи (1) является непрерывным и обладает ограниченной вариацией. В последнем случае предполагается наличие информации о значении $v(\cdot)$ в точке a.

В настоящей работе предлагается вариант динамического регуляризирующего алгоритма для нелинейной задачи (1), построенный по схеме, изложенной в [7]. Построенный алгоритм обладает важным свойством понижения зашумленности решения.

В дополнение к допущениям о задаче (1), сделанным выше, будем предполагать, что $q \leqslant m$, а также существование, липшицевость и наличие полного ранга матрицы

– функции $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\cdot) \overset{\text{def}}{=} f_v(\cdot)$ на W_ε, непрерывность и ограниченность вариации $v(\cdot)$.

Систему (1) представим в удобном для дальнейшего изучения в виде:

$$x'(t) = f\big(t, x(t), v(t-\Delta)\big) + f_v\big(t, x(t), v(t-\Delta)\big)\big(v(t) - v(t-\Delta)\big) + R(t,\Delta).$$

Из равенства

$$f\big(t, x(t), v(t)\big) - f\big(t, x(t), v(t-\Delta)\big) - f_v\big(t, x(t), v(t-\Delta)\big)\big(v(t) - v(t-\Delta)\big) =$$
$$= \int_0^1 \Big(f_v\big(t, x(t), \tau\, v(t)\big) - f_v\big(t, x(t), (1-\tau)\, v(t-\tau)\big)\Big) d\tau \big(v(t) - v(t-\Delta)\big)$$

следует существование $\lambda \geq 0$ такого, что

$$\Big|R(t,\Delta)\Big| \leqslant \frac{1}{2}\lambda \Big|v(t) - v(t-\Delta)\Big|^2. \tag{3}$$

Рассмотрим задачу

$$y'(t) = f\big(t, x(t), v(t-\Delta)\big) - f_v\big(t, x(t), v(t-\Delta)\big)\big(v(t) - v(t-\Delta)\big).$$

При этом

$$x'(t) - y'(t) = R(t,\Delta). \tag{4}$$

Также рассмотрим систему, моделирующую как движение $x(\cdot)$, так и $x'(\cdot)$.

$$w_0'(t) = \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha} \tag{5}$$

Система (5) является классической жесткой задачей, поэтому для ее численного решения целесообразно использовать неявные методы, обладающие внутренним регуляризирующим эффектом.

Зададим разбиение T узлами t_i :

$$t_0 = a, \quad t_n = b, \quad t_i - t_{i-1} = \Delta \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Для функции $\varphi(\cdot)$, определенной на T, условимся $\varphi(t_i) \overset{\text{def}}{=} \varphi_i$. Будем предполагать возможность получения неточной информации о движении в узлах разбиения:

$$\big|x_i - \xi_i\big| \leqslant h.$$

Реализация метода Эйлера для решения (5) при использовании неточной информации дает

$$w_{i+1}^h = w_i^h + \big(\xi_{i+1} - w_{i+1}^h\big)\frac{\Delta(h)}{\alpha(h)}; \quad w_0^h = \xi_0. \tag{6}$$

Как отмечалось выше, параметры метода должны зависеть от погрешности h.

Из (6) следует, что

$$w_{i+1}^h = \xi_{i+1} - \frac{\alpha(h)}{\Delta(h) + \alpha(h)}(\xi_{i+1} - w_i^h), \tag{7}$$

$$\frac{\xi_{i+1} - w_{i+1}^h}{\alpha(h)} = \frac{\xi_{i+1} - w_i^h}{\Delta(h) + \alpha(h)}. \tag{8}$$

Формулы (7), (8) позволяют выбрать такое согласование параметров, что переменные $h, \Delta(h), \dfrac{\alpha(h)}{\Delta(h)}, \dfrac{h}{\alpha(h)}$ вместе стремятся к нулю справа.

Далее для упрощения записей примем следующую договоренность: произведение функций одинакового аргумента $r_1(\cdot)r_2(\cdot)\ldots r_k(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \{r_1 r_2 \ldots r_k\}(\cdot)$. Систему (5) за счет выбора управления $u^0(\cdot)$ приведем к виду

$$w_0'(t) = f\big(t, x(t), u^0(t-\Delta)\big) + f_v\big(t, x(t), u^0(t-\Delta)\big)\big(u^0(t) - u^0(t-\Delta)\big).$$

Отсюда

$$u^0(t) = u^0(t-\Delta) + \big\{\big(f_v^T f_v\big)^{-1} f_v^T\big\}\big(t, x(t), u^0(t-\Delta)\big)\big(w_0'(t) - f(t, x(t), u^0(t-\Delta))\big).$$

Дискретизация с учетом неточности информации и (8) приводят к соотношению

$$u_{i+1}^h = u_i^h + \big\{\big(f_v^T f_v\big)^{-1} f_v^T\big\}\big(t_{i+1}, \xi_{i+1}, u_i^h)\big)\Big(\frac{\xi_{i+1} - w_i}{\Delta(h) + \alpha(h)} - f(t_{i+1}, \xi_{i+1}, u_i^h))\Big). \tag{9}$$

Таким образом, возникает необходимость иметь информацию о значении u_0^h с точностью $\delta(h)$ и согласованием $\dfrac{\delta(h)}{\Delta(h)} \to +0$ вместе с h. Поскольку в силу (3), (4) и свойств метода Эйлера имеет место последовательность сходимостей в $L(T, R^m)$

$$w'^h(\cdot) \to w_0'(\cdot) \to y'(\cdot) \to x'(\cdot),$$

то последовательность $u^h(\cdot)$ сходится к $v(\cdot)$ при $h \to +0$.

Таким образом, формулы (6), (9) и значение u_0^h при выполнении предлагаемого согласования параметров $h, \alpha(h), \Delta(h), \delta(h)$ задают динамический регуляризирующий алгоритм.

Отметим положительные моменты рассматриваемого метода.

1. Малый объем используемой памяти: для выполнения операции на шаге требуется информация об одном значении функций $x(\cdot)$, $w(\cdot)$, $f(\cdot)$, $f_v(\cdot)$.

2. Используемый для моделирования $x'(\cdot)$ метод обладает регуляризирующим эффектом.

3. Элемент $u_{i+1} - u_i$ минимизирует сглаживающий функционал на шаге, тем самым минимизируется вариация решения.

4. Величина шага разбиения метода равна корню из шага обычного метода Эйлера, в связи с этим, несмотря на необходимость псевдообращения матрицы $f_v(\cdot)$, его результирующая трудоемкость существенно ниже.

5. Пункты 2 и 3 позволяют снизить зашумленность приближенного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501-504.

2. *Аникин С.А.* Об оценке погрешности метода регуляризации А.Н. Тихонова в задачах восстановления входов динамических систем // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37. № 9. С. 1056-1057.

3. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51-60.

4. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.

5. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problemsfor ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.

6. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.

7. *Вдовин А.Ю., Рублева С.С.* О реконструкции воздействия в системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1093-1096.

Поступила в редакцию 19 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 27 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Вдовин Андрей Юрьевич, Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: vdovin@usfeu.ru

Рублева Светлана Сергеевна, Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail:rublevas@mail.ru

Для цитирования: *Вдовин А.Ю., Рублева С.С.* Численное моделирование входного воздействия в нелинейной динамической системе // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 228–234. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-228-234

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-228-234

NUMERICAL SIMULATION OF THE INPUT IMPACT IN A NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM

A. Y. Vdovin, S. S. Rubleva

Ural State Forest Engineering University
37 Sibirsky tract, Yekaterinburg 620100, Russian Federation
E-mail: vdovin@usfeu.ru, rublevas@mail.ru

Abstract. A numerical method for constructing an unknown effect in a nonlinear system of ODEs is considered.
Keywords: inverse problems of dynamics; the dynamic regularization algorithm

REFERENCES

1. Tikhonov A.N. O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii [The solution of ill-posed problems and regularization method]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1963, vol. 151, no. 3, pp. 501-504. (In Russian).

2. Anikin S.A. Ob otsenke pogreshnosti metoda regulyarizatsii A.N. Tikhonova v zadachakh vosstanovleniya vkhodov dinamicheskikh sistem [On the error estimation of the regularization method Tikhonov in problems of restoration of inputs of dynamic systems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, vol. 37, no. 9, pp. 1056-1057. (In Russian).

3. Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S. O modelirovanii upravleniya v dinamicheskoy sisteme [On the modeling of control in a dynamic system]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [News of Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics], 1983, no. 2, pp. 51-60. (In Russian).

4. Krasovskiy N.N. *Upravlenie dinamicheskoy sistemoy. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* [The Control of Dynamic System. The Problem of Minimum Guaranteed Result]. Moscow, Nauka Publ., 1985. (In Russian).

5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problemsfor ordinary differential equations: dynamical solutions*. London, Gordon and Breach, 1995.

6. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Regulyariziruyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularizing Algorithms and a priori Information]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 200 p. (In Russian).

7. Vdovin A.Yu., Rubleva S.S. O rekonstruktsii vozdeystviya v sisteme obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The reconstruction of impact in the system of ordinary differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1093-1096. (In Russian).

Received 19 March 2018
Reviewed 27 April 2018
Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Vdovin Andrey Yurievich, Ural State Forest Engineering University, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the High Mathematics Department, e-mail: vdovin@usfeu.ru

Rubleva Svetlana Sergeevna, Ural State Forest Engineering University, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the High Mathematics Department, e-mail: rublevas@mail.ru

For citation: Vdovin A.Y., Rubleva S.S. Chislennoye modelirovaniye vkhodnogo vozdeystviya v nelineynoy dinamicheskoy sisteme [Numerical simulation of the input impact in a nonlinear dynamical system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 228–234. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-228-234 (In Russian, Abstr. in Engl.).